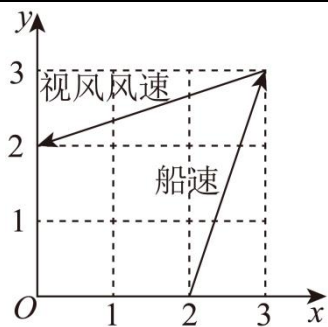


2025 年高考全国一卷数学真题

一、单选题

- $(1 + 5i)i$ 的虚部为 ()
A. -1 B. 0 C. 1 D. 6
- 设全集 $U = \{x | x \text{ 是小于 } 9 \text{ 的正整数}\}$, 集合 $A = \{1, 3, 5\}$, 则 $\complement_U A$ 中元素个数为 ()
A. 0 B. 3 C. 5 D. 8
- 若双曲线 C 的虚轴长为实轴长的 $\sqrt{7}$ 倍, 则 C 的离心率为 ()
A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. $\sqrt{7}$ D. $2\sqrt{2}$
- 若点 $(a, 0) (a > 0)$ 是函数 $y = 2\tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象的一个对称中心, 则 a 的最小值为 ()
A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{4\pi}{3}$
- 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上且周期为 2 的偶函数, 当 $2 \leq x \leq 3$ 时, $f(x) = 5 - 2x$, 则 $f\left(-\frac{3}{4}\right) =$ ()
A. $-\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{2}$
- 帆船比赛中, 运动员可借助风力计测定风速的大小和方向, 测出的结果在航海学中称为视风风速, 视风风速对应的向量, 是真风风速对应的向量与船行风速对应的向量之和, 其中船行风速对应的向量与船速对应的向量大小相等, 方向相反. 图 1 给出了部分风力等级、名称与风速大小的对应关系. 已知某帆船运动员在某时刻测得的视风风速对应的向量与船速对应的向量如图 2 (风速的大小和向量的大小相同), 单位 (m/s), 则真风为 ()

等级	风速大小 m/s	名称
2	1.1~3.3	轻风
3	3.4~5.4	微风
4	5.5~7.9	和风
5	8.0~10.1	劲风



- 轻风 B. 微风 C. 和风 D. 劲风
- 若圆 $x^2 + (y + 2)^2 = r^2 (r > 0)$ 上到直线 $y = \sqrt{3}x + 2$ 的距离为 1 的点有且仅有 2 个, 则 r 的取值范围是 ()
A. $(0, 1)$ B. $(1, 3)$ C. $(3, +\infty)$ D. $(0, +\infty)$
- 若实数 x, y, z 满足 $2 + \log_2 x = 3 + \log_3 y = 5 + \log_5 z$, 则 x, y, z 的大小关系不可能是 ()
A. $x > y > z$ B. $x > z > y$
C. $y > x > z$ D. $y > z > x$

二、多选题

- 在正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, D 为 BC 中点, 则 ()
A. $AD \perp A_1C$ B. $BC \perp$ 平面 AA_1D
C. $AD // A_1B_1$ D. $CC_1 //$ 平面 AA_1D

10. 设抛物线 $C: y^2 = 6x$ 的焦点为 F , 过 F 的直线交 C 于 A 、 B , 过 F 且垂直于 AB 的直线交 $l: x = -\frac{3}{2}$ 于 E , 过点 A 作准线 l 的垂线, 垂足为 D , 则 ()

- A. $|AD| = |AF|$
 B. $|AE| = |AB|$
 C. $|AB| \geq 6$
 D. $|AE| \cdot |BE| \geq 18$

11. 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{4}$, 若 $\cos 2A + \cos 2B + 2\sin C = 2$, $\cos A \cos B \sin C = \frac{1}{4}$, 则 ()

- A. $\sin C = \sin^2 A + \sin^2 B$ B. $AB = \sqrt{2}$
C. $\sin A + \sin B = \frac{\sqrt{6}}{2}$ D. $AC^2 + BC^2 = 3$

三、填空题

12. 若直线 $y = 2x + 5$ 是曲线 $y = e^x + x + a$ 的切线, 则 $a =$.

13. 若一个等比数列的各项均为正数, 且前 4 项和为 4, 前 8 项和为 68, 则该等比数列的公比为_____.

14. 一个箱子里有 5 个相同的球，分别以 1~5 标号，若每次取一颗，有放回地取三次，记至少取出一次的球的个数 X ，则数学期望 $E(X) =$ _____.

四、解答题

15. 为研究某疾病与超声波检查结果的关系, 从做过超声波检查的人群中随机调查了 1000 人, 得到如下列联表:

超声波检查结果组别	正常	不正常	合计
患该疾病	20	180	200
未患该疾病	780	20	800
合计	800	200	1000

(1)记超声波检查结果不正常者患该疾病的概率为 P ,求 P 的估计值;

(2)根据小概率值 $\alpha = 0.001$ 的独立性检验,分析超声波检查结果是否与患该疾病有关.

$$\text{附}\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)},$$

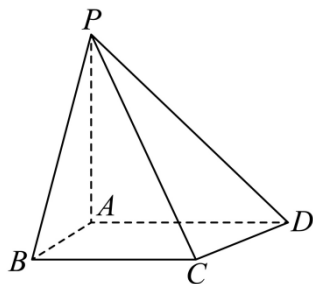
$P(x^2 \geq k)$	0.005	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

16. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 3$, $\frac{a_{n+1}}{n} = \frac{a_n}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$

(1)证明: $\{na_n\}$ 为等差数列;

(2) 设 $f(x) = a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m$, 求 $f'(-2)$.

17. 如图所示的四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $BC \parallel AD$, $AB \perp AD$.



(1)证明: 平面 $PAB \perp$ 平面 PAD ;

(2) $PA = AB = \sqrt{2}, AD = 1 + \sqrt{3}, BC = 2$, P, B, C, D 在同一个球面上, 设该球面的球心为 O .

- (i) 证明: O 在平面 $ABCD$ 上;
(ii) 求直线 AC 与直线 PO 所成角的余弦值.

18. 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$, 下顶点为 A , 右顶点为 B , $|AB| = \sqrt{10}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 已知动点 P 不在 y 轴上, 点 R 在射线 AP 上, 且满足 $|AR| \cdot |AP| = 3$.

(i) 设 $P(m, n)$, 求点 R 的坐标 (用 m, n 表示);

(ii) 设 O 为坐标原点, Q 是椭圆上的动点, 直线 OR 的斜率为直线 OP 的斜率的 3 倍, 求 $|PQ|$ 的最大值.

19. (1) 设函数 $f(x) = 5\cos x - \cos 5x$, 求 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 的最大值;

(2) 给定 $\theta \in (0, \pi)$, 设 a 为实数, 证明: 存在 $y \in [a - \theta, a + \theta]$, 使得 $\cos y \leq \cos \theta$;

(3) 若存在 φ 使得对任意 x , 都有 $5\cos x - \cos(5x + \varphi) \leq b$, 求 b 的最小值.